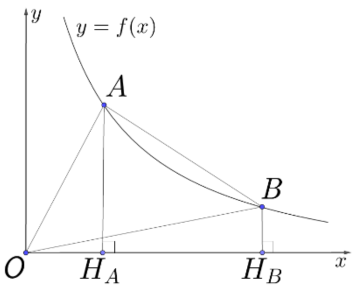
Вариант 1

1. У Олега есть 550 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы одиннадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т.п.)

2. Отличные от нуля числа a и b являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 5px + 2p^3 = 0$. Уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень. Найдите p. Решение обоснуйте.

3. Придумайте какую-нибудь систему из двух уравнений с двумя неизвестными x и y, чтобы ее решениями были *только* следующие три пары чисел: $x = y = 1, x = y = 2$ и $x = 3, y = 4$. В записи уравнений системы, помимо чисел и собственно неизвестных x и y, разрешается использовать скобки, знак $=$, стандартные арифметические операции и элементарные функции.

4. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс; O – начало координат). Найдите все такие функции. Решение обоснуйте.



5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен 45^0. Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF. Решение обоснуйте.

6. Пусть x_1 и x_2 – наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_1}{x_2}$. Решение обоснуйте.

7. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения $\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \ldots}}}$

8. Пусть A и B – некоторые числовые множества, а множество $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ представляет собой их сумму. (Другими словами, множество C состоит из всевозможных сумм элементов множеств A и B. Если, например, $A = \{0,1,2\}, B = \{1,2\}$, то $C = \{1,2,3,4\}$.)
Известно, что $C = \{0,1,2, \ldots, 2^{2828}\}$, а максимальный элемент множества A равен
$$\max A = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2020} + \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2020}$$
Докажите или опровергните следующие утверждения: 1) множество A и множество B содержат конечное число членов; 2) все элементы множеств A и B – целые числа; 3) $\max B \geq 2$.